ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ БАНКОВСКИХ АКТИВОВ И ОБЯЗАТЕЛЬСТВ И ВЕРОЯТНОСТИ БАНКРОТСТВА БАНКОВСКОЙ ФИРМЫ В РАМКАХ ЗАДАЧИ УСЛОВНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Борисов И.А.
(Уральский государственный университет им. А.М.Горького, Екатеринбург)

Определение соотношения между оптимальным портфелем банковских активов и обязательств и вероятностью банкротства банковской фирмы, а также влияния на указанные параметры величины банковского капитала имеет большое значение с точки зрения прогнозирования динамики развития банковского сектора и выработки мер макроэкономической политики. При допущении о совершенной конкуренции в банковском секторе наиболее подходящим инструментом решения данной проблемы становится портфельный подход. На основании анализа портфельных моделей управления банковскими активами можно сделать вывод, что существует два способа ввода в модель предпочтений банковского менеджмента относительно риска и доходности. Во-первых, предпочтения можно задать в целевой функции, в качестве которой используется функция полезности от ожидаемой доходности портфеля и среднего квадратичного отклонения доходности. Во-вторых, предпочтения можно задать в качестве ограничения на вероятность наступления нежелательного события при максимизации ожидаемой доходности. Данная постановка задачи реализуется в рамках метода условного программирования.

Введем основные допущения модели.

Пусть банковская фирма располагает возможностью приобретения n видов рисковых активов и размещения m видов рисковых обязательств.

$x_i : x_i \geq 0, i \in [1,n]; x_i \leq 0, i \in [n+1, n+m]$ – объем поддерживаемых банковской фирмой активов (пассивов). Следует отметить, что требование на неотрицательность активов и неположительность пассивов прямо в модели не используется, хотя и является естественным с точки зрения реальности банковской деятельности. Далее из представленной модели будут выведены условия, при которых указанное допущение будет выполняться.

Пусть существует безрисковый актив i = n+m+1, с известной доходностью R, за m обозначим количество безрискового актива, поддерживаемого банком.

K – объем собственного капитала банковской фирмы, по допущению является экзогенным.

Исходя из указанных допущений, балансовое ограничение банковской фирмы принимает вид: $\sum_{i=1}^{n+m} x_i + m = K$ (1).

Банковская фирма выступает совершенным конкурентом на всех рынках. Уровни доходности по банковским активам и выплаты по пассивам R_i представляют собой экзогенно заданные нормально распределенные случайные величины с известными параметрами распределения: $R_i \sim N(r_i, \Omega_i)$, где r_i – ожидаемая доходность i-го актива (пассива),Ω_i – матрица ковариации между уровнями доходности i-го актива (пассива) и уровнями доходности остальных банковских активов и пассивов i = 1,.., m + n. При нормальных рыночных условиях разумно предположение, что $r_i \geq 0, i = \overline{1, n+m}$.

$\Omega = [\sigma_{ij}]$ – матрица ковариации между уровнями доходности банковских активов (пассивов). Чтобы исключить возможность существования безрисковой структуры портфеля произвольной величины предположим, что матрица ковариации является положительно определенной, следовательно, для всех банковских портфелей X, таких, что $\sum_{i=1}^{n+m} x_i + m = K$ либо $X^T\Omega X > 0$, либо $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n+m}$.

Банковская фирма допускает максимальную вероятность банкоротства – a* <0,5. Банкротство банковской фирмы наблюдается когда убыточность портфеля превышает величину банковского капитала: $\sum_{i=1}^{n+m} x_i R_i + Rm < -K$ (2).

Банковская фирма стремится максимизировать ожидаемую доходность портфеля.

При данных допущениях задача банковской фирмы примет вид[1]:

$$\max E$$

$$s.t.\begin{cases} E = \sum_{i=1}^{n+m} r_i x_i + Rm \\ \sigma^2 = X^T \Omega X \\ \sum_{i=1}^{n+m} x_i + m = K \\ E + \Phi^{-1}(a^*)\sigma \geq -K \end{cases}$$

(3), где $\Phi^{-1}(a)$ – обратное нормированное нормальное распределение.

Очевидно, что оптимальный портфель банковской фирмы должен являться эффективным. Под эффективным портфелем понимается такой портфель с параметрами (E, σ), что не существует никакого другого портфеля (E', σ') для которого выполняется: E = E', σ > σ'[2].

---

[1] Fried Joel. Bank Portfolio Selection / Joel Fried // The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 5, No. 2 (Jun., 1970), 203-227. [Электронный ресурс] – http://www.jstor.org/sici?sici=0022-1090%28197006%295%3A2%3C203%3ABPS%3E2.0.CO%3B2-D – 25.01.2006.

[2] Hart Oliver D. On the Application of Portfolio Theory to Depository Financial Intermediaries / Oliver D Hart; Dwight M. Jaffee // The Review of Economic Studies, Vol. 41, No 1 (Jan, 1974), 129-147. [Электронный ресурс] –http://www.jstor.org/sici?sici=0034-6527%28 197401%294 1%3A1%3C 129%3AOTAOPT%3E10.CO%3B2-Q – 23.09.2005.

С использованием аналитического вывода Мертона (1972 г.)[3] множество эффективных портфелей может быть представлено как:

$$x_k = \frac{(E-KR)\sum_{j=1}^{n+m} v_{jk}}{B-2AR+CR^2}, k = \overline{1,n+m}$$ (4) – структура эффективного портфеля с ожидаемой доходностью Е.

Где $[v_{kj}] = \Omega^{-1}$; $A = \sum_{k=1}^{n+m}\sum_{j=1}^{n+m} v_{kj} r_j$; $B = \sum_{k=1}^{n+m}\sum_{j=1}^{n+m} v_{kj} r_k r_j$; $C = \sum_{k=1}^{n+m}\sum_{j=1}^{n+m} v_{kj}$.

Очевидно, что В > 0 и С > 0.

$$\sigma = \frac{E-KR}{\sqrt{B-2AR+CR^2}}$$ (5) – множество эффективных портфелей в пространстве (E, σ).

Очевидно, что множество эффективных портфелей представляет собой линейную функцию от Е, исходящую из точки $E^0 = KR$, $\sigma^0 = 0$.

Если обратиться к исходным допущениям модели, можно сделать вывод, что каждый оптимальный портфель банковской фирмы должен удовлетворять условиям: $x_k \geq 0, k = \overline{1,n}, x_k \leq 0, k = \overline{1+n,n+m}$.

Однако, так как оптимальные объемы активов и пассивов являются результатом принятия решения банковской фирмой целесообразно выявить условия, при которых область допустимых портфелей будет удовлетворять указанному условию.

Из (4) следует, что необходимым условием для выполнения данного допущения является следующая система неравенств:

$$\sum_{j=1}^{n+m} v_{kj}(r_j - R) > 0, k = \overline{1,n}, \sum_{j=1}^{n+m} v_{kj}(r_j - R) < 0, k = \overline{n+1,n+m}$$ (6).

Таким образом, мы определили необходимое условие для финансового посредничества в общем виде для n+m активов и пассивов.

Для случая, когда существует только один рисковый актив и один рисковый пассив необходимые условия для финансового посредничества примут следующий вид[4]:

$x_1 > 0 \Leftrightarrow \sigma_2^2(r_1 - R) > \sigma_{12}(r_2 - R)$ $x_2 < 0 \Leftrightarrow \sigma_1^2(r_2 - R) < \sigma_{12}(r_1 - R)$, что при допущении, что $\sigma_{12} = 0$ будет означать положительную рисковую премию по активам (кредитам) и отрицательную рисковую премию по пассивам (депозитам).

Рассмотрим соотношение характеристик эффективного портфеля и вероятность банкротства банковской фирмы.

---

[3] Merton Robert C. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier / Robert C. Merton // The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 7, No. 4 (Sep., 1972), 1851-1872. [Электронный ресурс] –http://www.jstor.org/sici?sici=0022-1090%28197209%297%3A4%3C1851%3AAADOTh%3E2.O.CO%3B2-X – 23.01.2006.

[4] Pyle David H. On the Theory of Financial Intermediation / David H. Pyle // The Journal of Finance, Vol. 26, No. 3 (Jun., 1971), 737-747. [Электронный ресурс] – http://www.jstor.org/sici?sici=0022-1082%28197106%2926%3A3%3C737%3AOTTOFI%3E2OCO%3B2-O – 3.02.2005.

При указанных допущениях вероятность банкротства будет определяться как Ф (– К), где Ф – функция нормального распределения с параметрами Е, σ. Преобразуя обратную функцию нормального распределения, получаем, что множество портфелей с заданной вероятностью банкротства описывается линейной функцией, исходящей из точки Е = – К, σ = 0 с угловым коэффициентом равным обратной функции нормированного нормального распределения для заданной вероятности банкротства, умноженной на – 1:

$$E = -\Phi^{-1}(a)\sigma - K \quad \textbf{(7)}.$$

Из уравнений множества эффективных портфелей видно, что для каждого эффективного портфеля может быть определена вероятность банкротства:

$$a = \Phi\left(-\frac{E+K}{E-KR}\sqrt{B-2AR+R^2C}\right) \quad \textbf{(8)}$$ для случая, когда К ≠ 0.

Легко показать, что вероятность банкротства возрастает по мере роста портфеля, когда К ≠ 0 и не зависит от величины портфеля, когда К=0:

$$a = \Phi\left(-\sqrt{B-2AR+R^2C}\right) \quad \textbf{(9)}.$$

Очевидно, что во всех случаях а < 0,5 для любого конечного портфеля.

С использованием разделяющей теоремы перейдем к решению задачи банковской фирмы в рамках метода условного программирования.

Пусть банковская фирма рассматривает максимальную допустимую вероятность банкротства, а* < 0,5, тогда с использованием разделяющей теоремы задача банковской фирмы (3) примет вид:

$$\max E$$

$$s.t. E + \Phi^{-1}(a^*)\sigma(E) \geq -K \quad \textbf{(10)},$$ σ(Е) – уравнение множества эффективных портфелей.

Так как вероятность банкротства для эффективного портфеля является возрастающей функцией от его ожидаемой доходности, в оптимуме ограничение должно выполняться как равенство.

В зависимости от допущений относительно структуры банковского портфеля возможны следующие случаи решения задачи (10).

1. Если К ≠ 0: $E^* = E : a^* = a$, где а – представляет собой правую часть (8), если $-\Phi^{-1}(a^*) > \frac{1}{\sqrt{B-2AR+CR^2}}$ и бесконечное расширение портфеля в ином случае.

2. Если К = 0, тогда если а* < а, то $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n+m}$ и бесконечное расширение портфеля в ином случае, где а представляет собой правую часть (9).

Таким образом, можно сделать вывод, что наличие фиксированного по величине капитала является необходимым условием для формирования конечного ненулевого портфеля.